848. Compact 群上ノ Markoff Process ニ就イテ

角谷 靜夫（阪大）

河田，伊藤両氏ハ compact 群上ノ Markoff process ニ関シテ大変興味アル結果ヲ証明サレ、更ニ河田氏ハコノ考ヘヲ使ッテ compact 群ノ Haar ノ measure ヲ簡単ニ定義スル方法ヲ示サレタ。（談話 846 及ビ 847） 本談話ニ於テハ コレラノ結果ニ對スル二三ノ注意ヲ與ヘタイ。

$p(E)$ ヲ compact 群 G 上デ定義サレタ任意ノ completely additive, non-negative ナ集合函數ニテ $p(G)=1$ ナルモノトシ，$P(x,E)=p(x^{-1}E)$ ニヨッテ G 上ノ Markoff process ヲ定義スル．先ヅ

$\boxed{\text{定理 I}}$ 任意ノ G デ定義サレタ連續函數 $f(x)$ ニ對シテ

$$f_n(x) \equiv \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\int_G P^{(m)}(x,dy)\, f(y) \quad \text{ハ}\ n\to\infty$$

ナルトキ一様收斂スル．

$\boxed{\text{証明}}$ G ノ上デ定義サレタ連續函數 $f(x)$ 全体ノ作ル Banach 空間ヲ $C(G)$ ニテ表ハセバ

$(\|f\|=\max_{x\in G}|f(x)|)$ $f\to T(f)=g$: $g(x)=\int_G P(x,$

$dy) f(y)$ ハ明カニ $C(G)$ ヲソレ自身ニウツス bounded linear operation デ且ツ $\|T\| \leqq 1$ シカモ $U_a(f) = g : g(x) = f(ax)$ トオケバ容易ニワカル如ク、任意ノ $a \in G$ ニ對シテ $TU_a = U_a T$ トナル。ヨツテ、任意ノ $f(x) \in C(G)$ ガ G ノ上デ一様連続ナルコトヨリ $f_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m(f)$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ハ G ノ上デ同程度且ツ一様連続トナル。（何トナレバ $f(x)$ ガ G ノ上デ一様連続ナルコトヨリ、任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ G ノ單位元 e ノ近傍 $U(e)$ ガ定マツテ $a \in U(e)$ ノルトキ $\|U_a(f) - f\| < \varepsilon$。ヨツテ $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ニ対シテ $a \in U(e)$ ナルトキ

$$\|U_a(f_n) - f_n\| \leqq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\|U_a(T^m(f)) - T^m(f)\|$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\|T^m[U_a(f) - f]\| \leqq \|U_a(f) - f\| < \varepsilon).$$

ヨツテ Ascoli-Arzela ノ定理ニヨリ $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ハ $C(G)$ ニ於テ compact トナル。シタガツテ Banach 空間 $C(G)$ ニ於ケル mean ergodic theorem ヨリ $\{f_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ハ一様收斂スル。（証明終）

此ノ如クシテ $C(G)$ ニ於テ $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m \to T_1$ (strongly) トナルコトガワカツタ。任意ノ $a \in G$ ニ

對シテ $T_1 U_a = U_a T_1$ トナルコトハ明カデアル。

次ニ各々ノ $f(x) \in C(G)$ ニ對シテ $T_1(f) = g$ トオキ．$g(x) = g(e)$ トナル如キ $x \in G$ 全体ノ集合ヲ $H(f)$，スベテノ $H(f)$ 共通部分ヲ H_0 ニテ表ハス。

$\boxed{\text{定理 2}}$ H_0 ハ G ノ closed subgroup デアル。

$\boxed{\text{証明}}$ H_0 ガ closed ナルコトハ明カデアル．ヨッテ $x, y \in H_0$ ナルトキ $x^{-1}, xy \in H_0$ トナルコトヲ示セバヨイ。

スベテノ $f \in C(G)$ ニ対シテ $g(x) = g(y) = g(e)$（但シ $g = T_1(f)$）デアッタトセヨ。$U_a T_1 = T_1 U_a$ ナルコトヨリ、スベテノ $a \in G$ ニ対シテ $g(ax) = g(ay) = g(a)$ トナル。ヨッテ $a = x^{-1}$ トオケバ $g(e) = g(x^{-1})$，$a = x$ トオケバ $g(xy) = g(x) = g(e)$ ヲ得ル．即チ $x^{-1}, xy \in H_0$ デアル。

定理 2 ニヨッテ定マル H_0 ガ河田，伊藤両氏ニヨッテ得ラレタ H_0 ト同じモノデアルコトハ殆ド明ラカデアル。実際 H_0 ガ $P^{(n)}(e, H) = 1$，$n = 1, 2, \cdots\cdots$ ナル如キ G ノ closed subgroup H ノウチノ最小ナルモノデアルコトハ容易ニ示サレル。

特ニ $H_0 = G$ トナル場合ガ興味ガアル．（一般ノ場合ハ G ノ代リニ H_0 ダケヲ考ヘレバヨイ）例ヘバ任意ノ G ノ open set U ニ對シテ $P^{(n)}(e, U) > 0$ トナル如キ integer n ガ存在スレバ $H_0 = G$ トナル、

コノトキ極限函數 $g(x)$ ハG全体デ常數トナル。コレハ J. v. Neumann ノ意味ノ $f(x)$ ノ mean ニ他ナラナイ。特ニ任意ノ G ノ open set U ニ對シテ $P(e, U) = p(U) > 0$ トナルトキハ $T^n(f)$ ガ $n \to \infty$ ナルトキ一様收斂スルコトガ河田氏ニヨッテ示サレテヰル。證明ノ方針ハ $T^n(f)$ ノ oscillation ガ 0 ニ收斂スルコトヲ使フノデアル。

コノ様ナ $p(E)$ ハ例ヘバ G ニ於テ dense ナ可附番集合 $D = \{a_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲトリ、コレニ對シテ $p(E) = \sum_{a_n \in E} \frac{1}{2^n}$ トオケバ得ラレルカラ、コレニヨッテ Haar ノ measure ノ一ツノ construction ガ與ヘラレタコトニナル。

コノ結果ハ J. V. Neumann ノ方法 (Compositio Math. I) ト比較スルト大ヘン面白ク思ハレル。

J. v. Neumann ノ方法ニヨレバ任意ノ $f(x) \in C(G)$ ニ對シテ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \in G$ ヲ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(xa_i)$ ノ oscillation ガ十分小ナリナルヤウニ撰ンデ行ケバ Haar ノ measure ガ求メラレルト云フコトハワカルガ、コノ様ナ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ヲ如何ニシテ選ブベキカト云フコトハ具体的ニ決定スルコトハ困難デアル。河田氏ノ方法ニヨレバ、實際ニ $p(E)$ ヲ具体的ニ決メルコトガ出來ルノデアル。

シカシ、コヽデ一ツ注意シタイコトガアル。ソレハ河田

氏ノ場合デモ J. v. Neumann ノ場合デモ Oscillation が 0 ニ收斂スルトイフコトヲ証明スル必要ガナク、單ニ norm （ $C(G)$ ノ element トシテノ）が minimum ニ收斂スルト云フコトヲ証明スレバ十分ナコトデアル。

即チ：

$\boxed{\text{定理3}}$ 任意ノ $f(x) \in C(G)$ ニ對シテ

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x a_i) \quad (a_i \in G,\ \alpha_i \geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1)$$

〔又ハ更ニ一般ニ $g(x) = \int_G p(x^{-1} dy) f(y)$，但シ $p(E) \geqq 0$，$p(G) = 1$〕ナル形ノ函数 $g(x)$ 全体ノ集合ヲ $A(f)$ ニテ表ハシ、$A(f)$ ニ屬スル函數 $g(x)$ ノ norm ノ下限ヲ m トスレバ m ハ J. v. Neumann ノイミノ mean $M(f)$ ニ外ナラヌ。

$\boxed{\text{証明}}$ ハ殆ド自明デアル。任意ノ $g \in A(f)$ ニ對シテ $\|g\| \geqq M(f)$ トナリ、又任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\|g\| < M(f) + \varepsilon$ ナル如キ $g \in A(f)$ が存在スルコトモ明カデアル。コハ $M(f)$ ノ存在ヲ知ッタ上ノ話デアルが、$M(f)$ ノ存在ヲ豫メ知ラズトモ、同ジコトハ容易ニ証明出來ルノデアル。コレハ $A(f)$ が compact ナルコト及ビ任意ノ $g \in \overline{A(f)}$ が常數デナケレバ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \in G$ ヲ適當ニトッテ

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x a_i) \right\| < \|g\|$$

トナラシメ得ルコトカラ容易ニワカル。

此ノ如ク考ヘレバ $g(x) \equiv m$ ナル函數ハ convex

compact set $\overline{A(f)}$ ノ中デーバン原点ニ近イ点トシテ characterize 出来ルノデアル. コノ様ナ"geometrical"ナ解釋ハ最近ノ proc. Nat. Acad. Sci. USA. 25(1939)ニ発表サレタ Garrett Birkhoff ノ uniformly convex ナ Banach 空間ニ於ケル semi-group transformation ニ関スル ergodic theorem ト比較シテ見ルト大ヘン面白イト思フ。